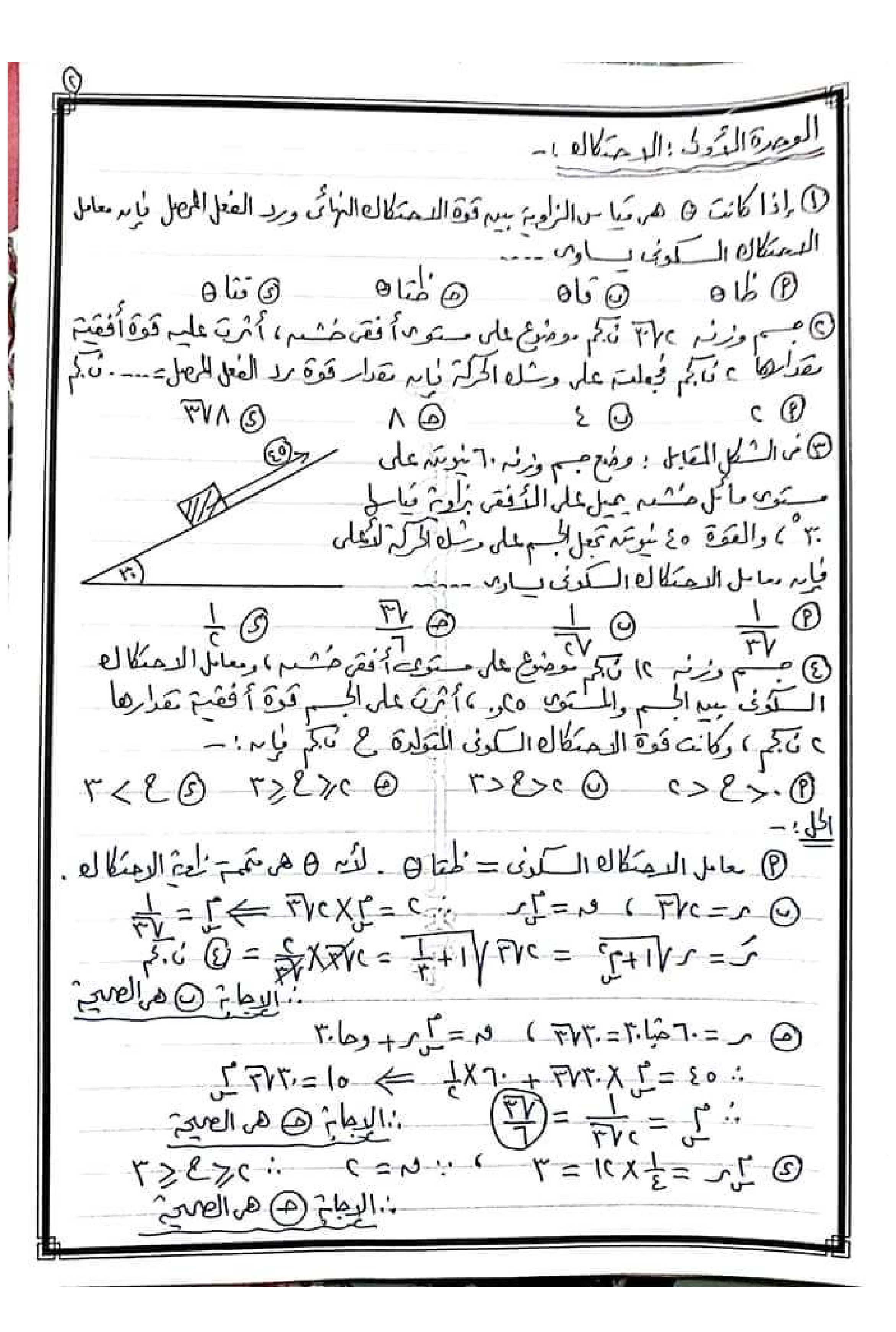
المراجعـــــة النهائيـــــة

فـــــــي

الإســــــتاتيكا

إعـــــداد :

أ / عبد الرحمن يوسف بريك



الوحدة الأولى: الاحتكاك :-

① إذا كانت θ هي قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك السكوني يساوي ....

(أ) ظا θ (ب) قا θ (ج) ظتا θ (د) قتا θ

② جسم وزنه ٢√٣ ث.كجم موضوع على مستوى أفقي خشن، أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٢ ث.كجم فجعلته على وشك الحركة فإن مقدار قوة رد الفعل المحصل = ... ث.كجم

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ٨√٣

③ في الشكل المقابل: وضع جسم وزنه ٦٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° والقوة ٤٥ نيوتن تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن معامل الاحتكاك السكوني يساوي ....

(أ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (د) $\frac{1}{2}$

④ جسم وزنه ١٢ ث.كجم موضوع على مستوى أفقي خشن، ومعامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى ٠,٢٥، أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ٢ ث.كجم، وكانت قوة الاحتكاك السكوني المتولدة ع ث.كجم فإن: -

(أ) ٠ < ع < ٢ (ب) ٢ < ع < ٣ (ج) ٢ ≤ ع ≤ ٣ (د) ع > ٣

الحل: -

(أ) معامل الاحتكاك السكوني = ظتا θ . لأن θ هي متممة زاوية الاحتكاك.

(ب) ر = ٢√٣ ، ق = م ر ∴ ٢ = م × ٢√٣ ⟸ م = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ر' = ر $\sqrt{1+م^2}$ = ٢√٣ $\sqrt{1+\frac{1}{3}}$ = ٢√٣ × $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = ④ ث.كجم

∴ الإجابة (ب) هي الصحيحة

(ج) ر = ٦٠ جتا ٣٠ = ٣٠√٣ ، ق = م ر + و جا ٣٠

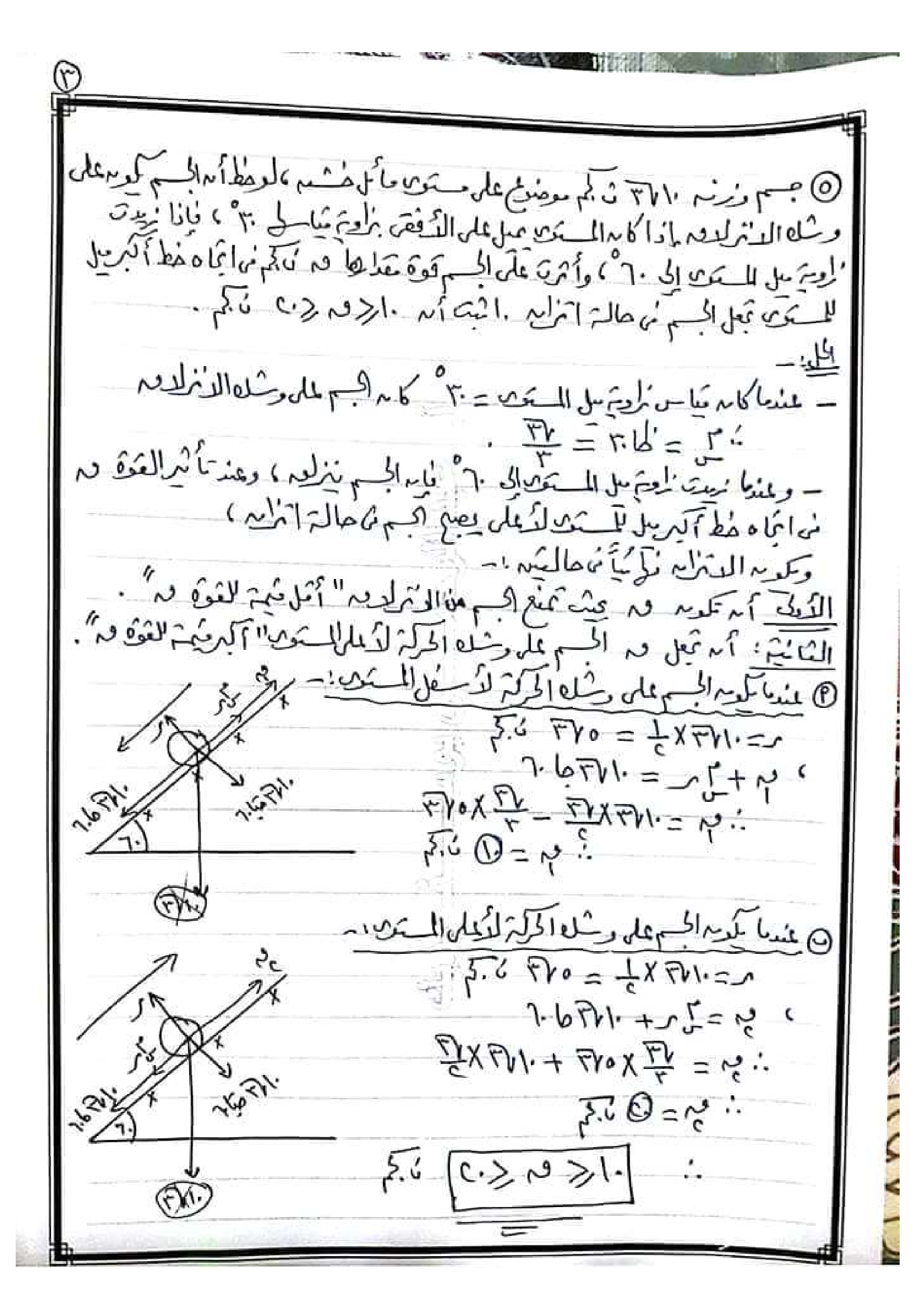
∴ ٤٥ = م × ٣٠√٣ + ٦٠ × $\frac{1}{2}$ ⟸ ١٥ = ٣٠√٣ م

∴ م = $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{6}$

∴ الإجابة (ج) هي الصحيحة

(د) م ر = $\frac{1}{4}$ × ١٢ = ٣ ، ∵ ق = ٢ ∴ ٢ ≤ ع ≤ ٣

∴ الإجابة (ج) هي الصحيحة



⑤ جسم وزنه ١٠√٣ ث كجم موضوع على مستوى مائل خشن، لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا زيدت زاوية ميل المستوى إلى ٦٠°، وأثرت على الجسم قوة مقدارها ق ث كجم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى تجعل الجسم في حالة اتزان. اثبت أن ١٠ ≤ ق ≤ ٢٠ ث كجم.

الحل:-

- عندما كان قياس زاوية ميل المستوى = ٣٠° كان الجسم على وشك الانزلاق

∴ م س = ظا ٣٠ = √٣ / ٣ .

- وعندما زيدت زاوية ميل المستوى إلى ٦٠° فإن الجسم ينزلق، وعند تأثير القوة ق في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى يصبح الجسم في حالة اتزان،

ويكون الاتزان نهائياً في حالتين:-

الأولى: أن تكون ق بحيث تمنع الجسم من الانزلاق "أقل قيمة للقوة ق".

الثانية: أن تجعل ق الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى "أكبر قيمة للقوة ق".

① عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل المستوى:-

ر = ١٠√٣ × ١/٢ = ٥√٣ ث.كجم

، ق١ + م س ر = ١٠√٣ جا ٦٠

∴ ق١ = ١٠√٣ × √٣/٢ − √٣/٣ × ٥√٣

∴ ق١ = ١٠ ث.كجم

② عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى:-

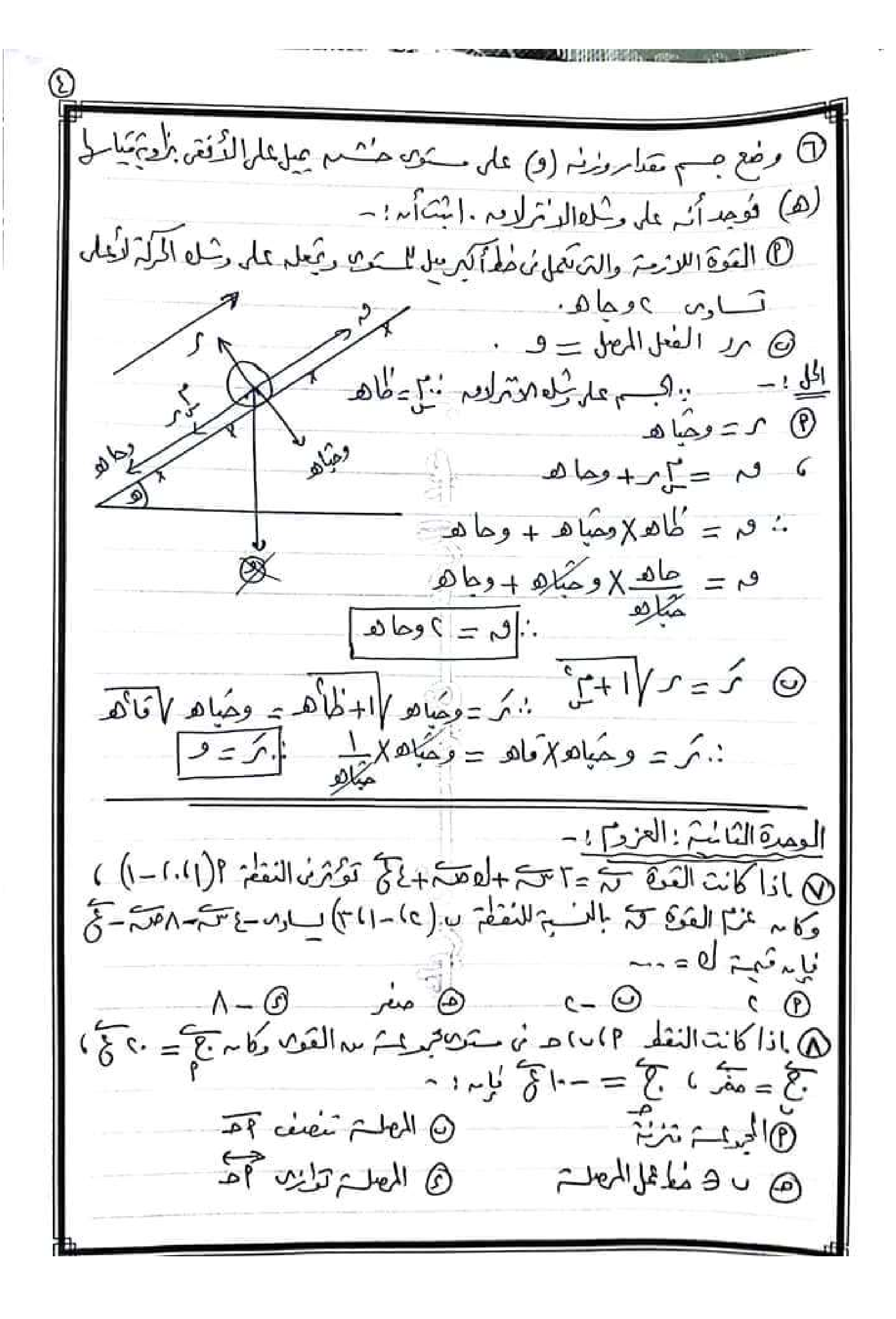
ر = ١٠√٣ × ١/٢ = ٥√٣ ث.كجم

، ق٢ = م س ر + ١٠√٣ جا ٦٠

∴ ق٢ = √٣/٣ × ٥√٣ + ١٠√٣ × √٣/٢

∴ ق٢ = ٢٠ ث.كجم

∴ ١٠ ≤ ق ≤ ٢٠ ث.كجم



٦ وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) فوجد أنه على وشك الانزلاق. اثبت أن:-

أ) القوة اللازمة والتي تعمل في خط أكبر ميل للمستوى وتجعله على وشك الحركة لأعلى تساوي ٢ و جا هـ.

ب) رد الفعل المحصل = و.

الحل:- ∵ الجسم على وشك الانزلاق ∴ م' = ظا هـ

أ) ر = و جتا هـ

، ق = م' ر + و جا هـ

∴ ق = ظا هـ × و جتا هـ + و جا هـ

ق = (جا هـ / جتا هـ) × و جتا هـ + و جا هـ

∴ ق = ٢ و جا هـ

ب) ر' = ر $\sqrt{١ + م'^2}$

∴ ر' = و جتا هـ $\sqrt{١ + ظا^2 هـ}$ = و جتا هـ $\sqrt{قا^2 هـ}$

∴ ر' = و جتا هـ × قا هـ = و جتا هـ × $\frac{1}{جتا هـ}$ ∴ ر' = و

الوحدة الثالثة: العزوم:-

٧ إذا كانت القوة ق = ٣ س + ل ص + ٤ ع تؤثر في النقطة أ(١، ٠، -١) وكان عزم القوة ق بالنسبة للنقطة ب(٢، -١، ٣) يساوي -٤ س - ٨ ص - ع فإن قيمة ل = ...

أ) ٢ ب) -٢ جـ) صفر د) -٨

٨ إذا كانت النقط أ، ب، جـ في مستوى مجموعة من القوى وكان جـأ = ٢٠ ع، جـب = صفر، جـجـ = -١٠ ع فإن:-

أ) المجموعة متزنة ب) المحصلة تنصف أجـ

جـ) ب ∈ خط عمل المحصلة د) المحصلة توازي أجـ

(٩) إذا كانت $\vec{ق} = ٣\vec{س} - ٤\vec{ص}$ وتؤثر في نقطة أ(١، ٢) فإن بُعد نقطة الأصل و(٠، ٠) عن خط عمل القوة يساوي ...... وحدة طول

(أ) $٧\sqrt{٥}$ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٠

(١٠) إذا كانت $\vec{ق} \parallel \overleftrightarrow{أب}$ ، جـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، وكان $\vec{ج}_{أ} + \vec{ج}_{ب} = ١٢\vec{ع}$ فإن $\vec{ج}_{جـ} = ...$

(أ) $١٢\vec{ع}$ (ب) $٦\vec{ع}$ (جـ) $-٦\vec{ع}$ (د) صفر

الحل:

(٧) $\vec{ج} = \vec{ب أ} \times \vec{ق} = (-١، ١، -٤) \times (٣، ل، ٤)$

∴ مركبة العزم في اتجاه محور س = ص $ق_{ع}$ − ع $ق_{ص}$

∴ $-٤ = ١ \times ٤ - (-٤) \times ل$

$-٤ = ٤ + ٤ل \Leftarrow ٤ل = -٨$ ∴ ل = (−٢)

∴ الإجابة (ب) هي الصحيحة

(٨) ∵ $\vec{ج}_{ب} = \vec{0}$ ∴ ب ∈ خط عمل المحصلة ∴ الإجابة (جـ) هي الصحيحة

(٩) $\vec{ج}_{و} = \vec{و أ} \times \vec{ق} = (١، ٢) \times (٣، -٤) = (-٤ - ٦)\vec{ع} = -١٠\vec{ع}$

∴ $ل = \frac{\|\vec{ج}\|}{\|\vec{ق}\|} = \frac{١٠}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٢$ وحدة طول ∴ الإجابة (ب) هي الصحيحة

(١٠) ∵ $\vec{ق} \parallel \overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\vec{ج}_{أ} = \vec{ج}_{ب}$ ∴ $٢\vec{ج}_{أ} = ١٢\vec{ع} \Leftarrow \vec{ج}_{أ} = \vec{ج}_{ب} = ٦\vec{ع}$

، ∵ جـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\vec{ج}_{جـ} = ٦\vec{ع}$ ∴ الإجابة (ب) هي الصحيحة

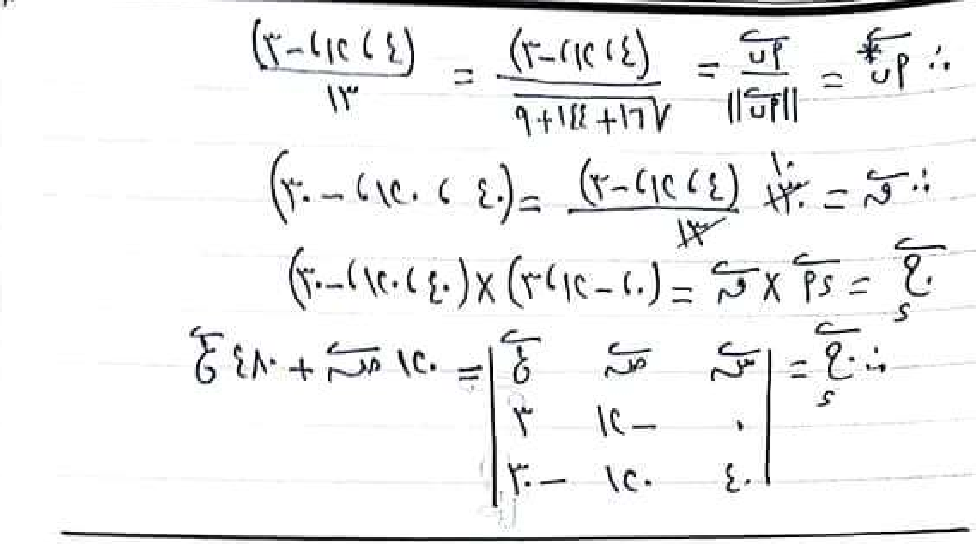
---

(١١) في الشكل المقابل: قوة $\vec{ق}$ مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في القطر $\overline{أب}$ في متوازي مستطيلات أبعاده ٣، ٤، ١٢ مترًا كما بالشكل. أوجد عزم القوة $\vec{ق}$ حول النقطة د.

الحل:

أ(٠، ٠، ٣)، ب(٤، ١٢، ٠)،
د(٠، ١٢، ٠)

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٤، ١٢، -٣)$



$\therefore \hat{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{(4,12,-3)}{\sqrt{16+144+9}} = \frac{(4,12,-3)}{13}$

$\therefore \vec{F} = 130 \cdot \frac{(4,12,-3)}{13} = (40, 120, -30)$

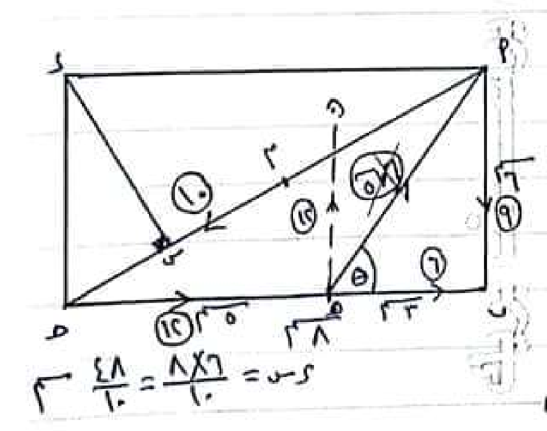
$\vec{M}_D = \vec{DA} \times \vec{F} = (0,-12,3) \times (40,120,-30)$

$\therefore \vec{M}_D = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -12 & 3 \\ 40 & 120 & -30 \end{vmatrix} = 120\,\hat{j} + 480\,\hat{k}$

---

(١٢) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب هـ = ٣ سم. أثرت قوى مقاديرها ٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٦√٥ نيوتن في الاتجاهات أب ، ب جـ ، جـ أ ، أ هـ على الترتيب . أوجد مجموع عزوم هذه القوى :
(أ) حول النقطة م نقطة تقاطع قطري المستطيل (ب) حول النقطة د

الحل :



من فيثاغورث : أجـ = ١٠ سم ،

أ هـ = ٣√٥ سم

نحلل القوة ٦√٥ إلى مركبتيها :

الأفقية في اتجاه هـ ب = ٦√٥ جتا θ

$= 6\sqrt{5} \times \frac{3}{3\sqrt{5}} = 6$ نيوتن

والرأسية في اتجاه هـ أ = ٦√٥ جا θ

$= 6\sqrt{5} \times \frac{6}{3\sqrt{5}} = 12$ نيوتن

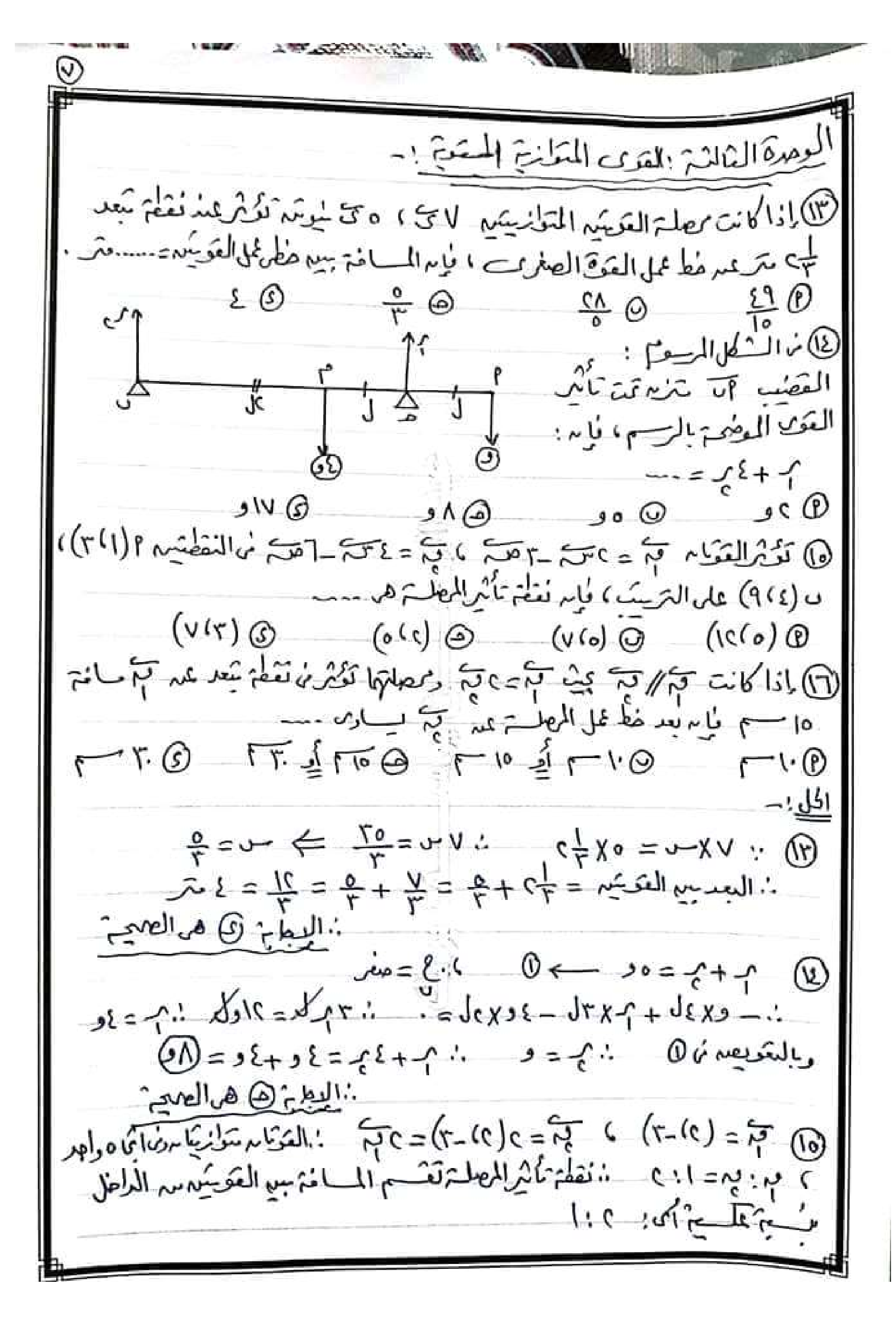
د س $= \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10}$ سم

(أ) $M_م = 10 \times 0 - 9 \times 4 + 12 \times 3 + 6 \times 3 + 12 \times 1 = 0 - 36 + 36 + 18 + 12$

$\therefore M_م = 30$ نيوتن.سم

(ب) $M_د = -10 \times \frac{48}{10} - 9 \times 8 + 6 \times 6 + 12 \times 6 + 12 \times 5 = -48 - 72 + 36 + 72 + 60$

$\therefore M_د = 48$ نيوتن.سم



الوحدة الثالثة : القوى المتوازية المستوية :-

(١٣) إذا كانت محصلة القوتين المتوازيتين ٧ ث كجم ، ٥ ث كجم تؤثر عند نقطة تبعد $٢\frac{١}{٣}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى ، فإن المسافة بين خطي عمل القوتين = ... متر .

(أ) $\frac{٤٩}{١٠}$ (ب) $\frac{٢٨}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٤

(١٤) من الشكل المرسوم :
القضيب أب متزن تحت تأثير القوى الموضحة بالرسم ، فإن :
ق١ + ٤ ق٢ = ...

(أ) ٢ و (ب) ٥ و (جـ) ٨ و (د) ١٧ و

(١٥) تؤثر القوتان ق١ = ٢ س − ٣ ص ، ق٢ = ٤ س − ٦ ص في النقطتين أ(١، ٣) ، ب(٤، ٩) على الترتيب ، فإن نقطة تأثير المحصلة هي ....

(أ) (٥، ١٢) (ب) (٥، ٧) (جـ) (٢، ٥) (د) (٣، ٧)

(١٦) إذا كانت ق١ // ق٢ بحيث ق١ = ٢ ق٢ ومحصلتهما تؤثر في نقطة تبعد عن ق١ مسافة ١٥ سم فإن بعد خط عمل المحصلة عن ق٢ يساوي ....

(أ) ١٠ سم (ب) ١٠ سم أو ١٥ سم (جـ) ١٥ سم أو ٣٠ سم (د) ٣٠ سم

الحل :-

(١٣) ∵ ٧ × س = ٥ × $٢\frac{١}{٣}$ ∴ ٧ س = $\frac{٣٥}{٣}$ ⟸ س = $\frac{٥}{٣}$

∴ البعد بين القوتين = $٢\frac{١}{٣} + \frac{٥}{٣} = \frac{٧}{٣} + \frac{٥}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$ متر

∴ الإجابة (د) هي الصحيحة

(١٤) ق١ + ق٢ = ٥ و ⟵ ① ، ∵ ع جـ = صفر

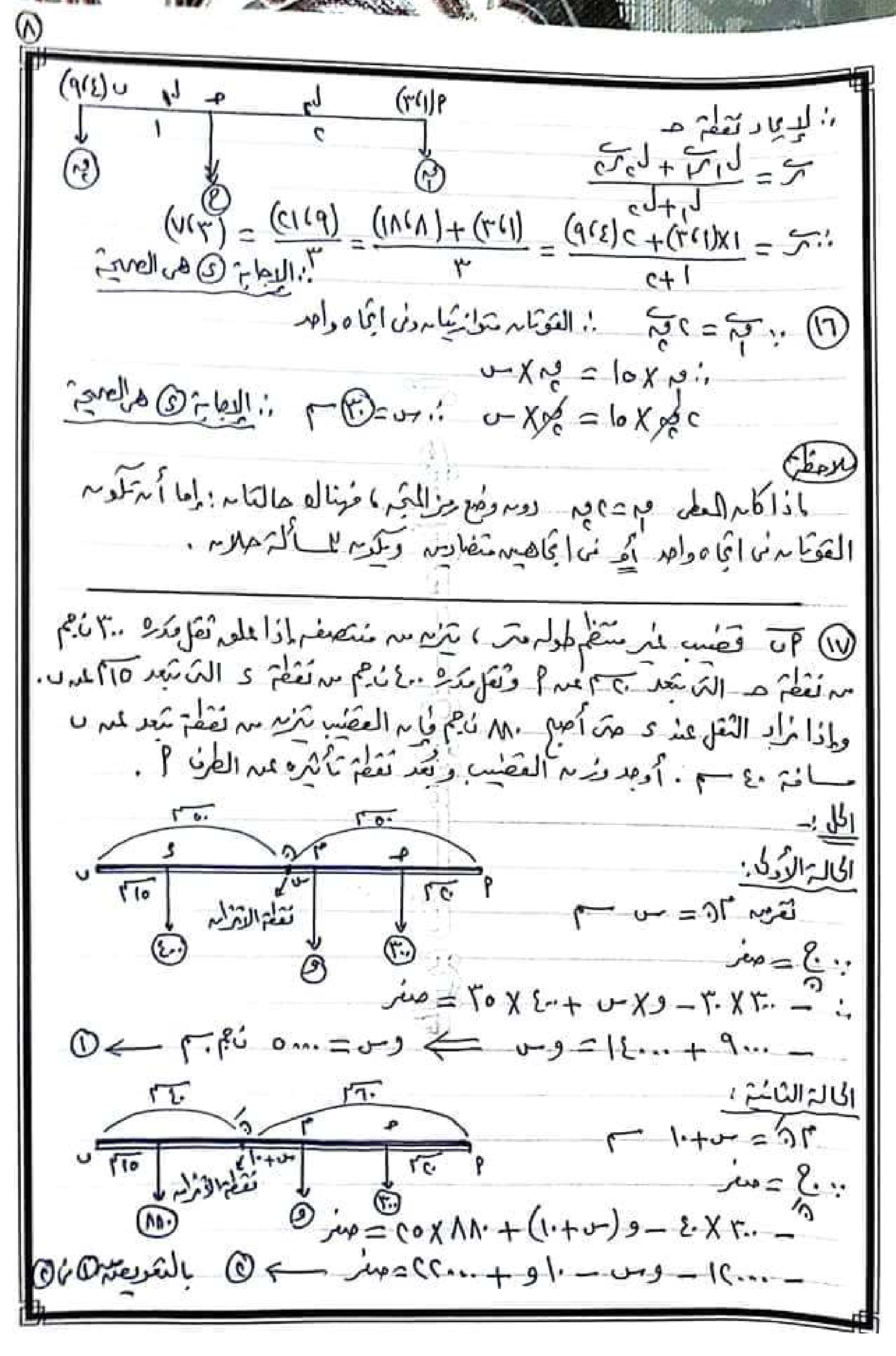
∴ − و × ٤ ل + ق١ × ٣ ل − ٤ و × ٢ ل = ٠ ∴ ٣ ق١ ل = ١٢ و ل ∴ ق١ = ٤ و

وبالتعويض في ① ∴ ق٢ = و ∴ ق١ + ٤ ق٢ = ٤ و + ٤ و = ٨ و

∴ الإجابة (جـ) هي الصحيحة

(١٥) ق١ = (٢، −٣) ، ق٢ = ٢(٢، −٣) = ٢ ق١ ∴ القوتان متوازيتان ومن اتجاه واحد

، ق١ : ق٢ = ١ : ٢ ∴ نقطة تأثير المحصلة تقسم المسافة بين القوتين من الداخل بنسبة عكسية أي : ٢ : ١



∵ لإيجاد نقطة ج

$$ر = \frac{ل_1 ر_1 + ل_2 ر_2}{ل_1 + ل_2}$$

$$∴ ر = \frac{١ × (٣،١) + ٢ (٤،٩)}{١ + ٢} = \frac{(٣،١) + (٨،١٨)}{٣} = \frac{(٢١،٩)}{٣} = (٣،٧)$$

∴ الإجابة (د) هي الصحيحة

(١٦) ∵ م أ = ٢ م ب ∴ القوتان متوازيتان وفي اتجاه واحد

∴ م أ × ١٥ = م ب × س

٢ م ب × ١٥ = م ب × س ∴ س = ٣٠ ث جم ∴ الإجابة (د) هي الصحيحة

ملاحظة

إذا كان المعطى م أ = ٢ م ب دون وضع رمز المتجه، فهناك حالتان: إما أن تكون القوتان في اتجاه واحد أو في اتجاهين متضادين وتكون للمسألة حلان.

(١٧) أ ب قضيب غير منتظم طوله متر، ترتكز من منتصفه إذا علق ثقل مقداره ٣٠٠ ث جم من نقطة ج التي تبعد ٢٠ سم عن أ وثقل مقداره ٤٠٠ ث جم من نقطة د التي تبعد ١٥ سم عن ب. وإذا زاد الثقل عند د حتى أصبح ٨٨٠ ث جم فإن القضيب يتزن من نقطة تبعد عن ب مسافة ٤٠ سم. أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثيره عن الطرف أ.

الحل:

الحالة الأولى:

نفرض م ن = س سم

∵ ج م = صفر

∴ − ٣٠٠ × ٣٠ − و × س + ٤٠٠ × ٣٥ = صفر

− ٩٠٠٠ + ١٤٠٠٠ = و س ⟸ و س = ٥٠٠٠ ث جم.سم ← (١)

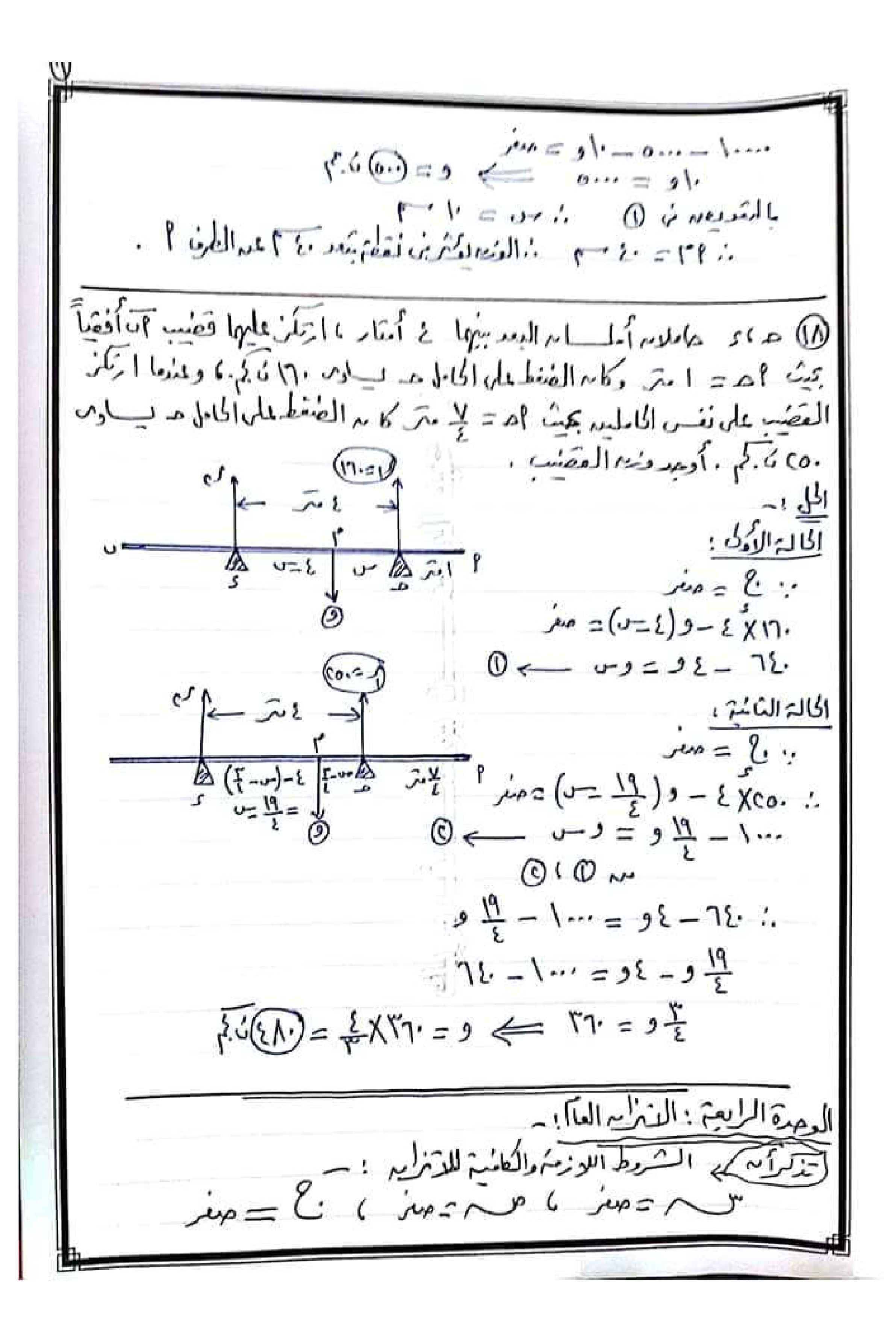
الحالة الثانية:

م ن = س + ١٠ سم

∵ ج م١ = صفر

∴ − ٣٠٠ × ٤٠ − و (س + ١٠) + ٨٨٠ × ٢٥ = صفر

− ١٢٠٠٠ − و س − ١٠ و + ٢٢٠٠٠ = صفر ← (٢) بالتعويض من (١) في (٢)



١٠٠٠ − ٥٠٠٠ − ١٠و = صفر

١٠و = ٥٠٠٠ ⟸ و = (٥٠٠) ث.جم

بالتعويض في (١) ∴ س = ١٠ سم

∴ أم = ٤٠ سم ∴ الوضع الذي يمكن تعليقه فيه على بعد ٤٠ سم عن الطرف أ .

---

(١٨) جـ ، د حاملان أملسان البعد بينهما ٤ أمتار ، ارتكز عليهما قضيب أب أفقياً بحيث أجـ = ١ متر وكان الضغط على الحامل جـ يساوي ١٦٠ ث.كجم ، وعندما ارتكز القضيب على نفس الحاملين بحيث أجـ = $\frac{1}{4}$ متر كان الضغط على الحامل جـ يساوي ٢٥٠ ث.كجم . أوجد وزن القضيب .

الحل :-

الكالة الأولى :

∵ ج = صفر

160×4 − و (٤ − س) = صفر

٦٤٠ − ٤و = و س ⟵ (١)

الحالة الثانية :

∵ ج = صفر

∴ 250×4 − و ($\frac{19}{4}$ − س) = صفر

١٠٠٠ − $\frac{19}{4}$ و = و س ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ٦٤٠ − ٤و = ١٠٠٠ − $\frac{19}{4}$ و

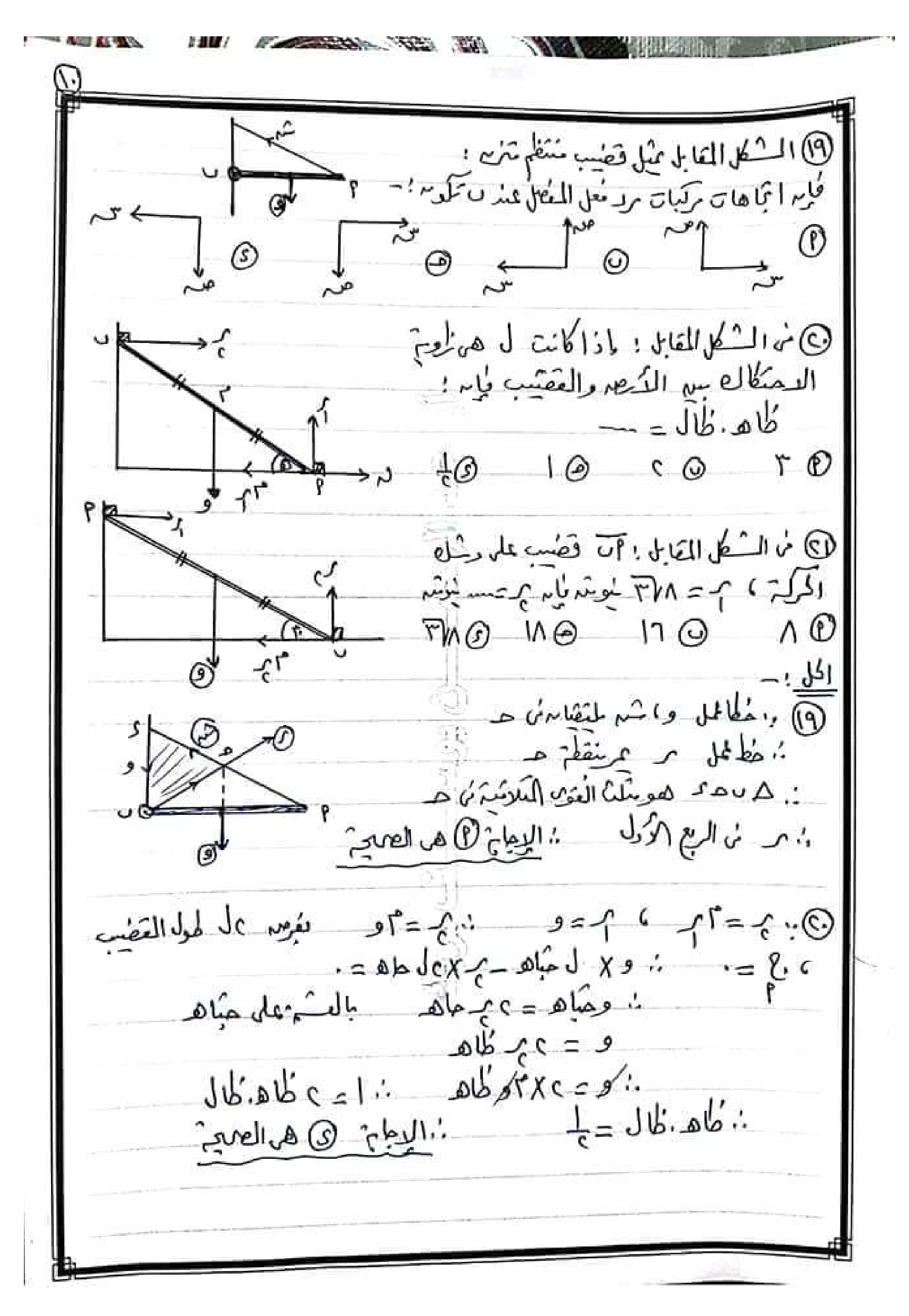
$\frac{19}{4}$ و − ٤و = ١٠٠٠ − ٦٤٠

$\frac{3}{4}$ و = ٣٦٠ ⟸ و = $360 \times \frac{4}{3}$ = (٤٨٠) ث.كجم

الوحدة الرابعة : الاتزان العام :-

تذكر أن ⟸ الشروط اللازمة والكافية للاتزان :-

سـ = صفر ، صـ = صفر ، ج = صفر



(١٩) الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم وزنه و ، فأي اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب تكون :-

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢٠) في الشكل المقابل : إذا كانت ل هي زاوية الاحتكاك بين الأرض والقضيب فإن :
ظاهـ . ظال = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) $\frac{1}{2}$

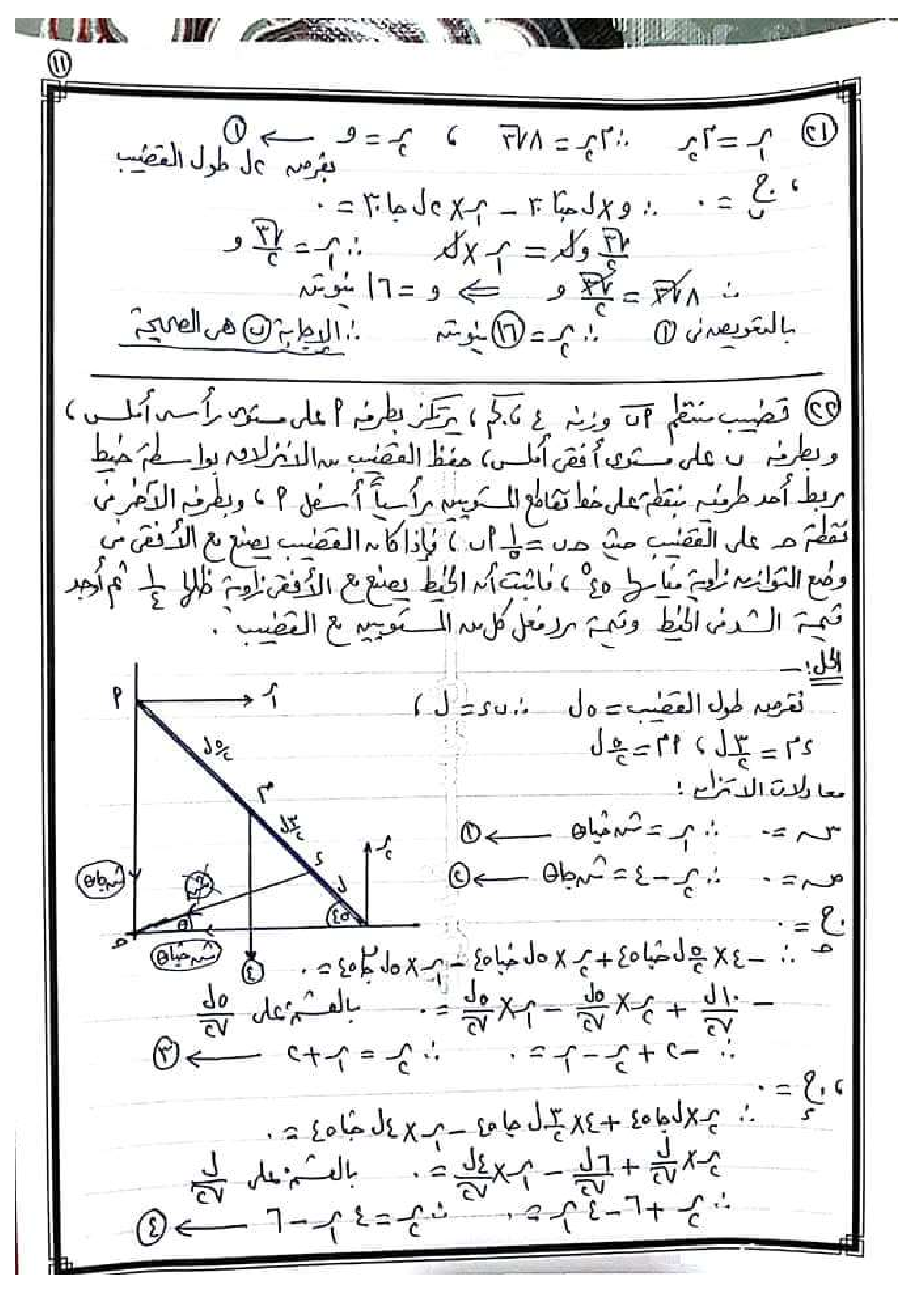
(٢١) في الشكل المقابل : $\overline{أب}$ قضيب على وشك الحركة ، $ر_1 = 8\sqrt{3}$ نيوتن فإن $ر_2$ = ... نيوتن

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) $8\sqrt{3}$

الحل :-

(١٩) ∵ خطا عمل و ، ش متقاطعان في حـ
∴ خط عمل ر يمر بنقطة حـ
∴ Δ ب حـ د هو مثلث القوى المتلاقية في حـ
∴ ر في الربع الأول ∴ الإجابة (أ) هي الصحيحة

(٢٠) ∵ $ر_2 = م ر_1$ ، $ر_1 = و$ ∴ $ر_2 = م و$ نفرض ٢ل طول القضيب
$ح_ب = 0$ ∴ و × ل جتاهـ − $ر_2$ × ٢ل جاهـ = ٠
∴ و جتاهـ = ٢ $ر_2$ جاهـ بالقسمة على جتاهـ
و = ٢ $ر_2$ ظاهـ
∴ و = ٢ × م و ظاهـ ∴ ١ = ٢ ظاهـ . ظال
∴ ظاهـ . ظال = $\frac{1}{2}$ ∴ الإجابة (د) هي الصحيحة



(٢١) ر١ = ٢ر٢ ∴ ٢ر٢ = ٨√٣ ، ر٢ = و ⟵ ①

بفرض ٢ل طول القضيب

، ع ب = ٠ ∴ و × ل جتا ٣٠ − ر١ × ٢ل جا ٣٠ = ٠

(√٣ / ٢) و ل = ر١ × ل ∴ ر١ = (√٣ / ٢) و

∴ ٨√٣ = (√٣ / ٢) و ⟸ و = ١٦ نيوتن

بالتعويض في ① ∴ ر٢ = ⑯ نيوتن ∴ الإجابة (ب) هي الصحيحة

---

(٢٢) قضيب منتظم أب وزنه ٤ ث.كجم، يرتكز بطرفه أ على مستوى رأسي أملس، وبطرفه ب على مستوى أفقي أملس، حفظ القضيب من الانزلاق بواسطة خيط ربط أحد طرفيه بنقطة على خط تقاطع المستويين رأسياً أسفل أ، وبطرفه الآخر من نقطة د على القضيب حيث د ب = ١/٥ أ ب، فإذا كان القضيب يصنع مع الأفقي في وضع التوازن زاوية قياسها ٤٥°، فأثبت أن الخيط يصنع مع الأفقي زاوية ظلها ١/٤ ثم أوجد قيمة الشد في الخيط وقيمة رد فعل كل من المستويين مع القضيب.

الحل:—

نفرض طول القضيب = ٥ل ∴ ب د = ل ،

د م = ٣/٢ ل ، أ م = ٥/٢ ل

معادلات الاتزان:

س = ٠ ∴ ر١ = ش جتا θ ⟵ ①

ص = ٠ ∴ ر٢ − ٤ = ش جا θ ⟵ ②

ع هـ = ٠

∴ −٤ × ٥/٢ ل جتا ٤٥ + ر٢ × ٥ل جتا ٤٥ − ر١ × ٥ل جا ٤٥ = ٠

− ١٠ل/√٢ + ر٢ × ٥ل/√٢ − ر١ × ٥ل/√٢ = ٠ بالقسمة على ٥ل/√٢

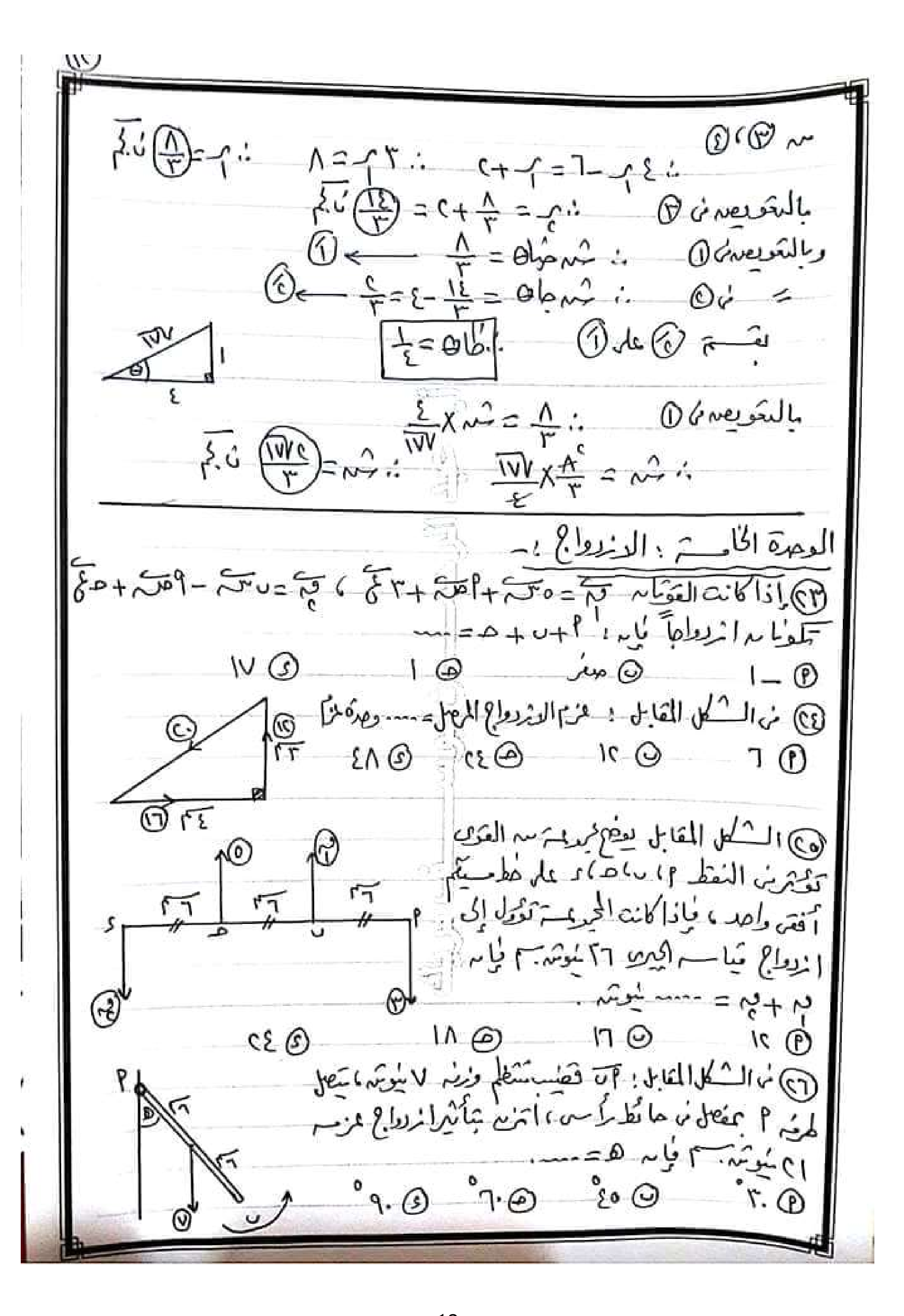
∴ −٢ + ر٢ − ر١ = ٠ ∴ ر٢ = ر١ + ٢ ⟵ ③

، ع د = ٠

∴ ر٢ × ل جتا ٤٥ + ٤ × ٣/٢ ل جتا ٤٥ − ر١ × ٤ل جا ٤٥ = ٠

ر٢ × ل/√٢ + ٦ل/√٢ − ر١ × ٤ل/√٢ = ٠ بالقسمة على ل/√٢

∴ ر٢ + ٦ − ٤ر١ = ٠ ، ∴ ر٢ = ٤ر١ − ٦ ⟵ ④



س ③، ④

∴ ٤ ق١ − ٦ = ق١ + ٢ ∴ ٣ ق١ = ٨ ∴ ق١ = (٨/٣) ث.كجم

بالتعويض في ② ∴ ق٢ = ٨/٣ + ٢ = (١٤/٣) ث.كجم

وبالتعويض في ① ∴ ش جتا θ = ٨/٣ ← ①

= في ② ∴ ش جا θ = ١٤/٣ − ٤ = ٢/٣ ← ②

بقسمة ② على ① ∴ ظا θ = ١/٤

بالتعويض في ① ∴ ٨/٣ = ش × ٤/√١٧

∴ ش = ٨/٣ × √١٧/٤ ∴ ش = (٢√١٧/٣) ث.كجم

الوحدة الخامسة : الازدواج :-

(٢٣) إذا كانت القوتان ق١ = ٥ س + أ ص + ٣ ع ، ق٢ = ب س − ٩ ص + جـ ع تكونان ازدواجاً فإن : أ + ب + جـ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ١٧

(٢٤) في الشكل المقابل : عزم الازدواج المحصل = ... وحدة عزم

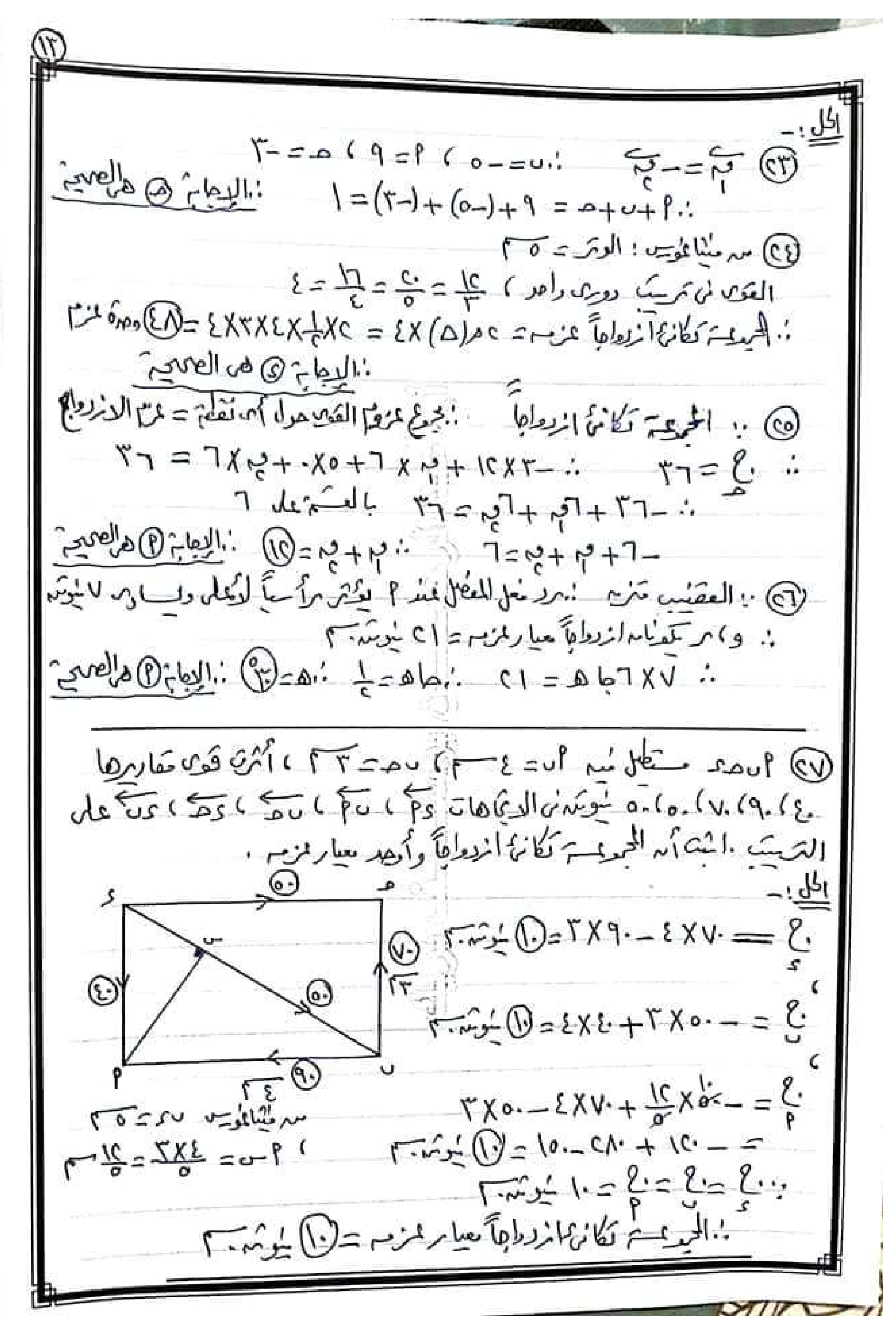
(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٢٥) الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى تؤثر في النقط أ ، ب ، جـ ، د على خط مستقيم أفقي واحد ، فإذا كانت المجموعة تؤول إلى ازدواج قياس معياره ٣٦ نيوتن.سم فإن ق١ + ق٢ = ... نيوتن .

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٢٦) في الشكل المقابل : أب قضيب منتظم وزنه ٧ نيوتن ، يتصل طرفه أ بمفصل في حائط رأسي ، اتزن بتأثير ازدواج عزمه ٢١ نيوتن.سم فإن هـ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°



الحل :-

(٢٣) ∵ ب/أ = -جـ/أ ∴ ب = -٥ ، أ = ٩ ، جـ = -٣

∴ أ + ب + جـ = ٩ + (-٥) + (-٣) = ١ ∴ الإجابة (هـ) هي الصحيحة

(٢٤) من فيثاغورث : الوتر = ٥ سم

القوى في ترتيب دوري واحد ، ١٢/٣ = ٢٠/٥ = ١٦/٤ = ٤

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه = ٢ م(△) × ٤ = ٢ × ١/٢ × ٤ × ٣ × ٤ = (٤٨) وحدة عزم

∴ الإجابة (ء) هي الصحيحة

(٢٥) ∵ المجموعة تكافئ ازدواجاً ∴ مجموع عزوم القوى حول أي نقطة = عزم الازدواج

∴ جـ = ٣٦ ∴ -٣ × ١٢ + ق١ × ٦ + ٥ × ٠ + ق٢ × ٦ = ٣٦

∴ -٣٦ + ٦ق١ + ٦ق٢ = ٣٦ بالقسمة على ٦

-٦ + ق١ + ق٢ = ٦ ∴ ق١ + ق٢ = (١٢) ∴ الإجابة (أ) هي الصحيحة

(٢٦) ∵ القضيب متزن ∴ رد فعل المفصل عند أ يؤثر رأسياً لأعلى ويساوي ٧ نيوتن

∴ و ، ر تكونان ازدواجاً معيار عزمه = ٢١ نيوتن.سم

∴ ٧ × ٦ جا هـ = ٢١ ∴ جا هـ = ١/٢ ∴ هـ = (٣٠) ∴ الإجابة (أ) هي الصحيحة

(٢٧) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٩٠ ، ٧٠ ، ٥٠ ، ٥٠ نيوتن في الاتجاهات ءأ ، ب أ ، ب جـ ، ء جـ ، ء ب على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه .

الحل :-

جـء = ٧٠ × ٤ - ٩٠ × ٣ = (١٠) نيوتن.سم

جـب = -٥٠ × ٣ + ٤ × ٤٠ = (١٠) نيوتن.سم

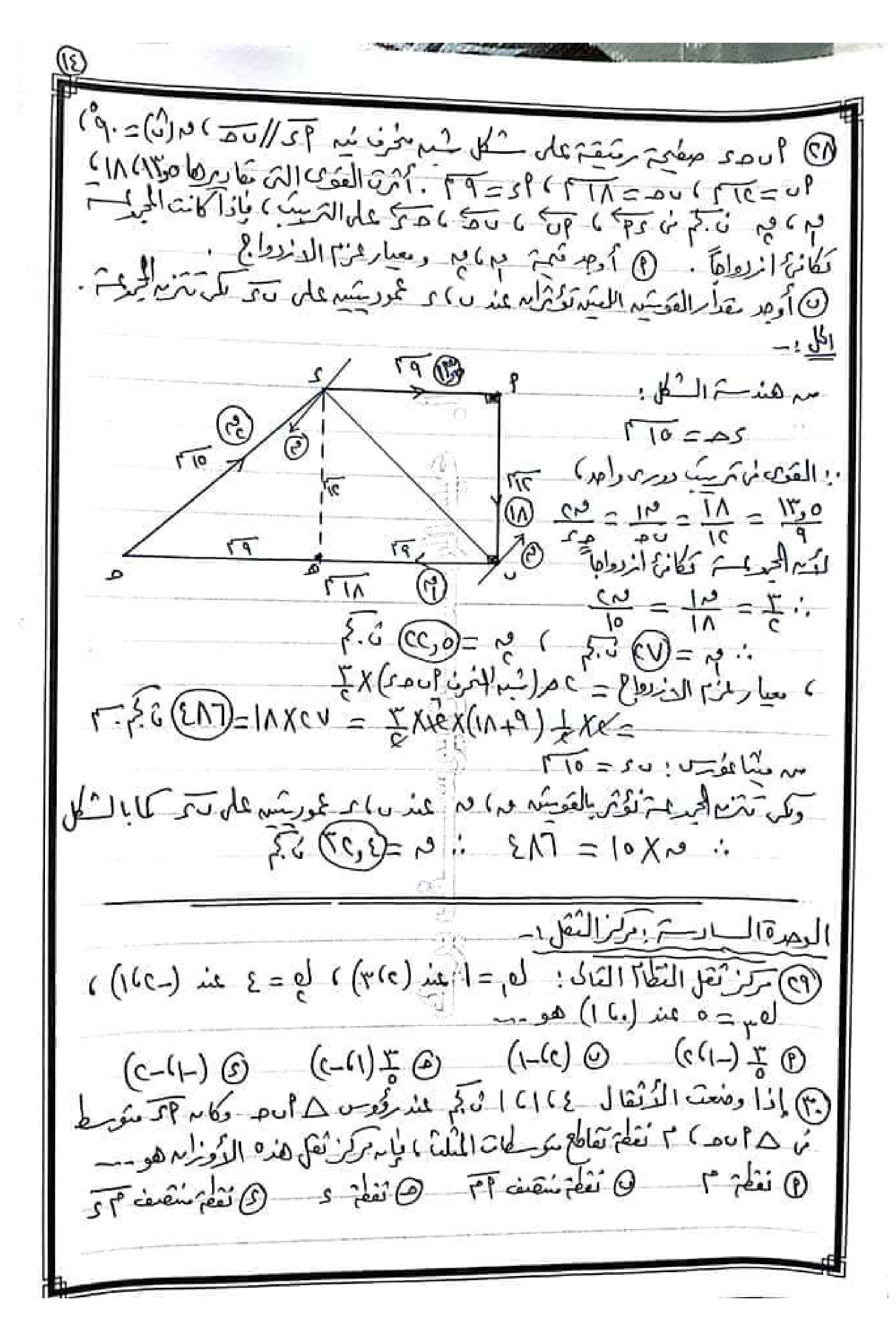
جـأ = -٥٠ × ١٢/٥ + ٧٠ × ٤ - ٥٠ × ٣

= -١٢٠ + ٢٨٠ - ١٥٠ = (١٠) نيوتن.سم

من فيثاغورث ب ء = ٥ سم ، أ س = ٣ × ٤/٥ = ١٢/٥ سم

∵ جـء = جـب = جـأ = ١٠ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = (١٠) نيوتن.سم



(٢٨) أ ب حـ د صفيحة رقيقة على شكل شبه منحرف فيه أد // ب حـ ، ق(∠ب) = ٩٠° ،
أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٨ سم ، أ د = ٩ سم . أثرت القوى التي مقاديرها ١٣٫٥ ، ١٨ ،
ق١ ، ق٢ ث.كجم في د أ ، أ ب ، ب حـ ، حـ د على الترتيب ، فإذا كانت المجموعة
تكافئ ازدواجاً . (أ) أوجد قيمة ق١ ، ق٢ ومعيار عزم الازدواج .
(ب) أوجد مقدار القوتين اللتين تؤثران عند ب ، د عموديتين على ب د لكي تتزن المجموعة .

الحل :-

من هندسة الشكل :
د حـ = ١٥ سم

∵ القوى في ترتيب دوري واحد

ق٢ / د حـ = ق١ / ب حـ = ١٨ / ١٢ = ١٣٫٥ / ٩

لأن المجموعة تكافئ ازدواجاً

∴ ق٢ / ١٥ = ق١ / ١٨ = ٣ / ٢

∴ ق١ = ٢٧ ث.كجم ، ق٢ = ٢٢٫٥ ث.كجم

، معيار عزم الازدواج = ٢ م(شبه المنحرف أ ب حـ د) × ٣/٢

= ٢ × ١/٢ × (٩ + ١٨) × ١٢ × ٣/٢ = ٢٧ × ١٨ = ٤٨٦ ث.كجم.سم

من فيثاغورث : ب د = ١٥ سم

ولكي تتزن المجموعة تؤثر بالقوتين ق ، ق عند ب ، د عموديتين على ب د كما بالشكل

∴ ق × ١٥ = ٤٨٦ ∴ ق = ٣٢٫٤ ث.كجم

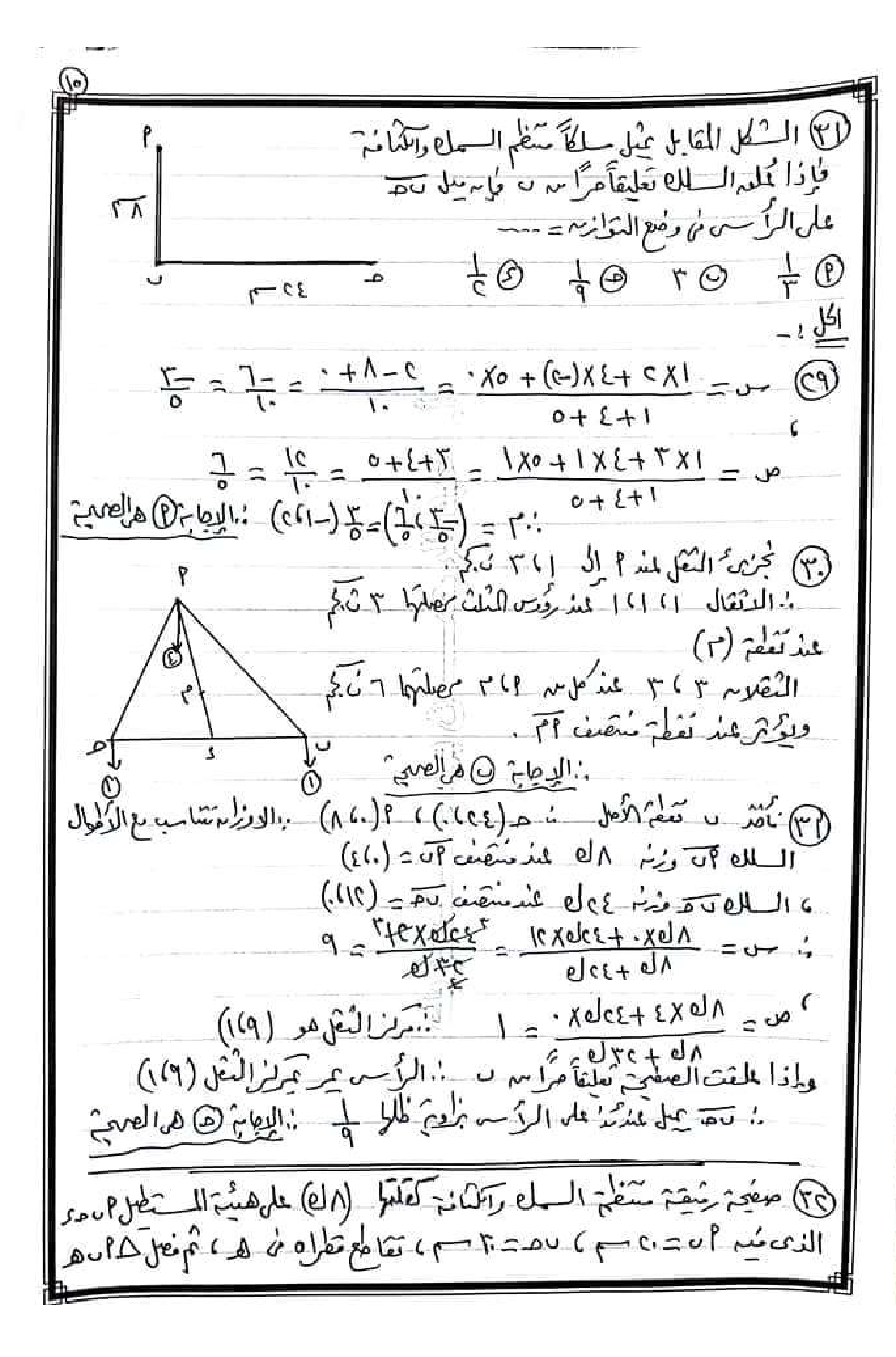
الوحدة السادسة : مركز الثقل :-

(٢٩) مركز ثقل النظام التالي : ك١ = ١ عند (٣ ، ٢) ، ك٢ = ٤ عند (−٢ ، ١) ،
ك٣ = ٥ عند (٠ ، ١) هو ....

(أ) ٣/٥ (٢ ، ١−) (ب) (١− ، ٢) (جـ) ٣/٥ (١ ، ٢−) (د) (١− ، ٢−)

(٣٠) إذا وضعت الأثقال ٤ ، ٢ ، ١ ث.كجم عند رؤوس △ أ ب حـ وكان أ د متوسط
في △ أ ب حـ ، م نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، فإن مركز ثقل هذه الأوزان هو ....

(أ) نقطة م (ب) نقطة منتصف أ م (جـ) نقطة د (د) نقطة منتصف م د



(٣١) الشكل المقابل يمثل سلكاً منتظم السمك والكثافة فإذا علق السلك تعليقاً حراً من ب فإن ميل $\overline{بجـ}$ على الرأسي في وضع التوازن = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٢}$

الحل :-

(٢٩) $س = \frac{١\times٢ + ٤\times(-٢) + ٥\times٠}{١+٤+٥} = \frac{٢-٨+٠}{١٠} = \frac{-٦}{١٠} = \frac{-٣}{٥}$

، $ص = \frac{١\times٣ + ١\times٤ + ١\times٥}{١+٤+٥} = \frac{٣+٤+٥}{١٠} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{٦}{٥}$

∴ $م = (\frac{-٣}{٥} ، \frac{٦}{٥}) = \frac{٣}{٥}(-١ ، ٢)$ ∴ الإجابة (أ) هي الصحيحة

(٣٠) تجزئ الثقل عند أ إلى ١ ، ٢ ث.كجم

∴ الأثقال ١ ، ١ ، ١ عند رؤوس المثلث محصلتها ٣ ث.كجم عند نقطة (م)

الثقلان ٣ ، ٣ عند كل من أ ، م محصلتهما ٦ ث.كجم وتؤثر عند نقطة منتصف $\overline{أم}$.

∴ الإجابة (ب) هي الصحيحة

(٣١) نأخذ ب نقطة الأصل ∴ جـ(٢٤ ، ٠) ، أ(٠ ، ٨) ∴ الأوزان تتناسب مع الأطوال

السلك $\overline{أب}$ وزنه ٨ك عند منتصف $\overline{أب}$ = (٠ ، ٤)

، السلك $\overline{بجـ}$ وزنه ٢٤ك عند منتصف $\overline{بجـ}$ = (١٢ ، ٠)

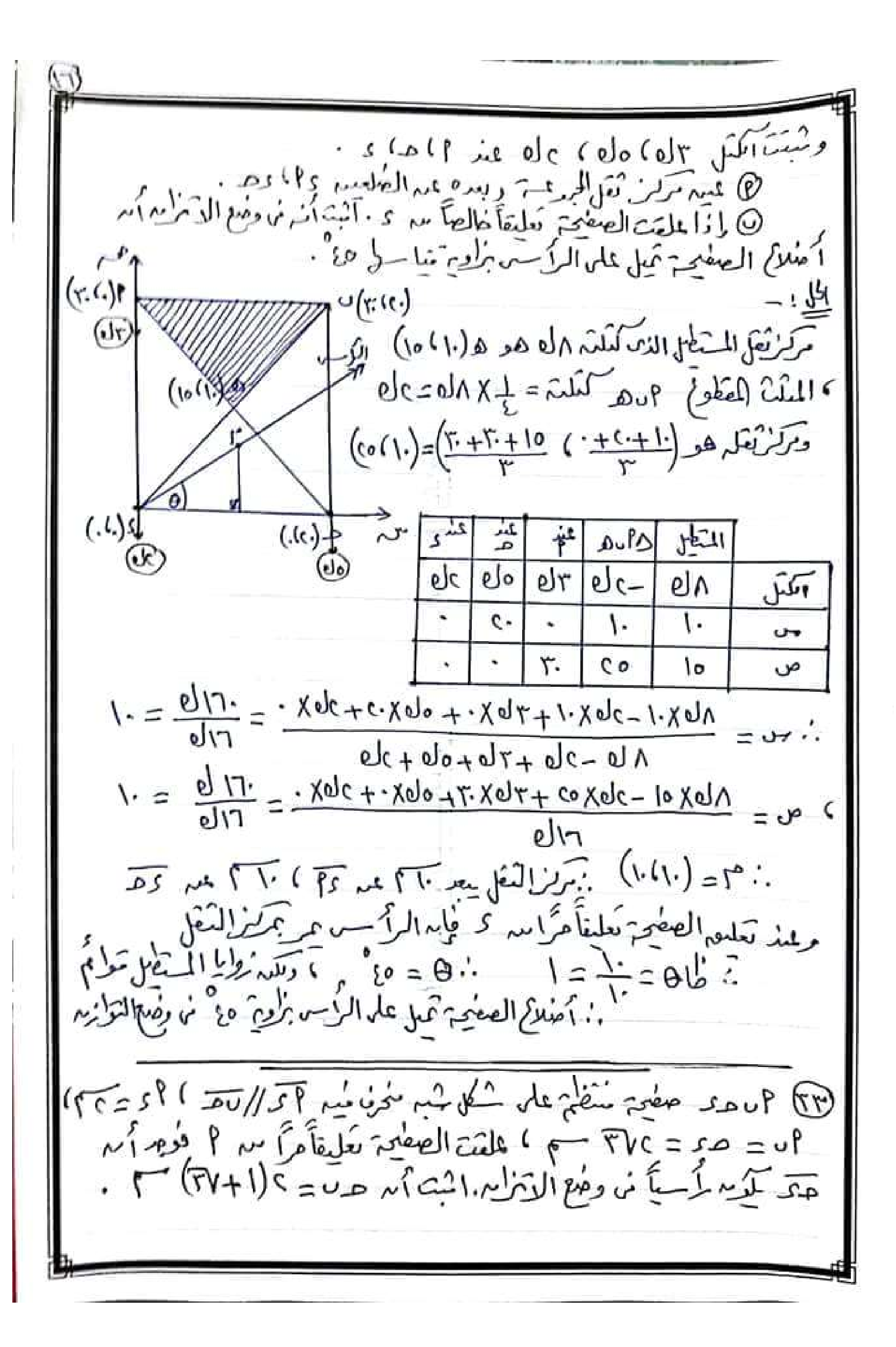
∴ $س = \frac{٨ك\times٠ + ٢٤ك\times١٢}{٨ك + ٢٤ك} = \frac{٢٤ك\times١٢}{٣٢ك} = ٩$

، $ص = \frac{٨ك\times٤ + ٢٤ك\times٠}{٨ك + ٢٤ك} = ١$ ∴ مركز الثقل هو (٩ ، ١)

وإذا علقت الصفيحة تعليقاً حراً من ب ∴ الرأسي يمر بمركز الثقل (٩ ، ١)

∴ $\overline{بجـ}$ يميل عندئذ على الرأسي بزاوية ظلها $\frac{١}{٩}$ ∴ الإجابة (جـ) هي الصحيحة

(٣٢) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة كتلتها (٨ك) على هيئة المستطيل أ ب جـ د الذي فيه أب = ٢٠ سم ، بجـ = ٣٠ سم ، تقاطع قطراه في هـ ، ثم فصل △ أ ب هـ



وثبتت الكتل ٣ك ، ٥ك ، ٢ك عند أ ، هـ ، د .
(أ) عين مركز ثقل المجموعة وبعده عن الضلعين د أ ، د هـ .
(ب) إذا علقت الصفيحة تعليقاً حراً من د . أثبت أنه في وضع الاتزان أن أضلاع الصفيحة تميل على الرأسي بزاوية قياسها ٤٥° .

الحل :
مركز ثقل المستطيل الذي كتلته ٨ك هو هـ (١٠ ، ١٥)
، المثلث المقطوع أ ب هـ كتلته = $\frac{1}{4}$ × ٨ك = ٢ك
ومركز ثقله هو $\left(\frac{\text{٠+٢٠+١٠}}{\text{٣}} ، \frac{\text{٣٠+٣٠+١٥}}{\text{٣}}\right)$ = (١٠ ، ٢٥)

	المستطيل	أ ب هـ	عند أ	عند هـ	عند د
الكتل	٨ك	-٢ك	٣ك	٥ك	٢ك
س	١٠	١٠	٠	٢٠	٠
ص	١٥	٢٥	٣٠	٠	٠

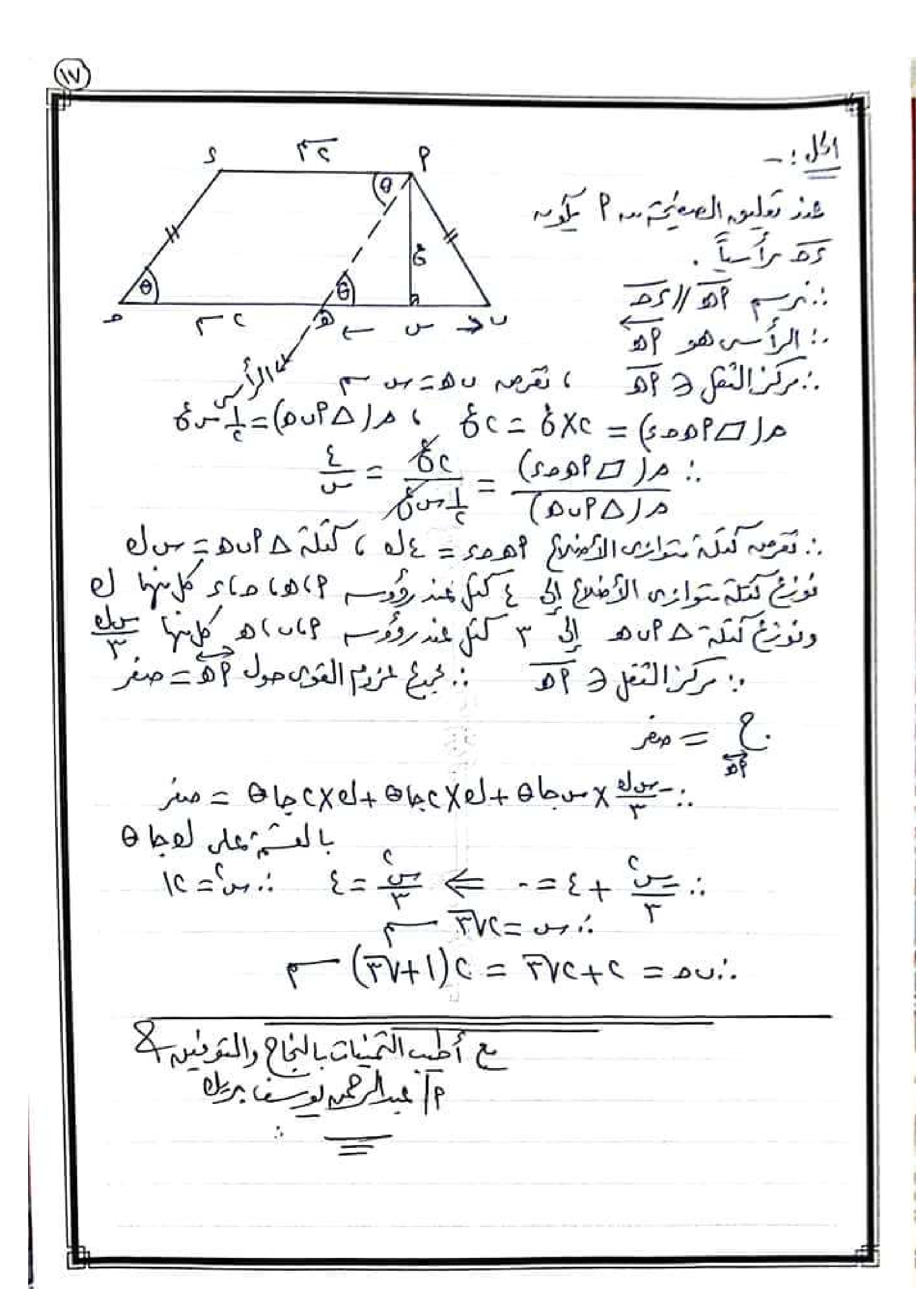
$$\therefore \text{س} = \frac{\text{٨ك×١٠ − ٢ك×١٠ + ٣ك×٠ + ٥ك×٢٠ + ٢ك×٠}}{\text{٨ك − ٢ك + ٣ك + ٥ك + ٢ك}} = \frac{\text{١٦٠ك}}{\text{١٦ك}} = \text{١٠}$$

$$\text{، ص} = \frac{\text{٨ك×١٥ − ٢ك×٢٥ + ٣ك×٣٠ + ٥ك×٠ + ٢ك×٠}}{\text{١٦ك}} = \frac{\text{١٦٠ك}}{\text{١٦ك}} = \text{١٠}$$

∴ م = (١٠ ، ١٠) ∴ مركز الثقل يبعد ١٠ سم عن د أ ، ١٠ سم عن د هـ
وعند تعليق الصفيحة تعليقاً حراً من د فإن الرأسي يمر بمركز الثقل
∴ ظا θ = $\frac{\text{١٠}}{\text{١٠}}$ = ١ ∴ θ = ٤٥° ، ولكن زوايا المستطيل قوائم
∴ أضلاع الصفيحة تميل على الرأسي بزاوية ٤٥° في وضع التوازن

(٢٣) أ ب جـ د صفيحة منتظمة على شكل شبه منحرف فيه أ د // ب جـ ، أ د = ٢ سم ، أ ب = جـ د = ٢√٢ سم ، علقت الصفيحة تعليقاً حراً من أ فوجد أن جـ د تكون رأسياً في وضع الاتزان . اثبت أن جـ ب = ٢(١+√٢) سم .

١٧



الحل :-

عند تعليق الصفيحة من أ تكون أهـ رأسياً .

∴ نرسم أهـ // دجـ

∴ الرأسي هو أهـ

∴ مركز الثقل ∈ أهـ ، نفرض ب هـ = س سم

م(▱ أهـ جـ د) = ٢ × ع = ٢ع ، م(△ أ ب هـ) = $\frac{1}{2}$ س ع

∴ $\frac{\text{م(▱ أهـ جـ د)}}{\text{م(△ أ ب هـ)}} = \frac{\text{٢ع}}{\frac{1}{2}\text{ س ع}} = \frac{\text{٤}}{\text{س}}$

∴ نفرض كتلة متوازي الأضلاع أهـ جـ د = ٤ك ، كتلة △ أ ب هـ = س ك

توزع كتلة متوازي الأضلاع إلى ٤ كتل عند رؤوس أ ، هـ ، جـ ، د كل منها ك

وتوزع كتلة △ أ ب هـ إلى ٣ كتل عند رؤوس أ ، ب ، هـ كل منها $\frac{\text{س ك}}{\text{٣}}$

∴ مركز الثقل ∈ أهـ ∴ مجموع عزوم القوى حول أهـ = صفر

ج (أهـ) = صفر

∴ $-\frac{\text{س ك}}{\text{٣}}$ × س جا θ + ك × ٢ جا θ + ك × ٢ جا θ = صفر

بالقسمة على ك جا θ

∴ $-\frac{\text{س}^2}{\text{٣}}$ + ٤ = ٠ ⟸ $\frac{\text{س}^2}{\text{٣}}$ = ٤ ∴ س² = ١٢

∴ س = ٢√٣ سم

∴ ب جـ = ٢ + ٢√٣ = ٢(١+√٣) سم

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

أ/ عبد الرحمن يوسف بريك